4.2　角速度ベクトル

「角速度: 回転は角速度ベクトル $\mathbf{\Omega}$ で記述される。ベクトル $\mathbf{\Omega}$ の方向は、右ネジ回転軸の方向 (図 17) である。角速度の大きさ:$\Omega = |\mathbf{\Omega}|$ は、ベクトル $\mathbf{\Omega}$ と直交する平面の回転する角速度である。」

図 20 のように、原点 O を回転軸上にとり、任意の回転している物体上の点を P とする。この点 P から回転軸に垂線 PQ をおろす。なお回転軸は x,y,z 軸どれとも一致している必要はない。$\vec{OP} = \mathbf{r}$、$OP = r$、$\angle POQ = \theta$ とする。すると、$PQ = OP \sin\theta = r \sin\theta$。

点 P は点 Q を中心に角速度 Ω で回転する。これは点 P が PQ を含み、回転軸 OQ に直角な平面上を QP に対して垂直な方向に、大きさ $QP\Omega = \Omega r \sin\theta$ の速度で変化することである。

この速度ベクトルを $\mathbf{v}$ とすると、このベクトルの方向は、ベクトル $\mathbf{\Omega}$ と直角で、かつ $\mathbf{\Omega}$（$\vec{OQ}$ と同じ方向)、$\vec{OP} = \mathbf{r}$、$\mathbf{v}$ の順に左手座標系 (図 17) を構成することがわかる。

またその大きさは、$v = |\mathbf{v}| = QP\Omega = \Omega r \sin\theta$ で、これはベクトル $\mathbf{\Omega}$ とベクトル $\mathbf{r}$ から作られる平行四辺形の面積に等しい。従って回転によって点 P の速度は

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \tag{110}$$

となる。ここで、$\mathbf{v}$ は、回転によって、回転系では静止している点の回転による速度ベクトルを表したものである。

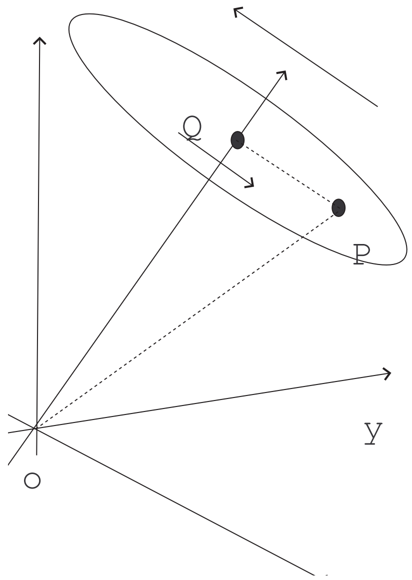


図 20: 空間上での回転する物体速度と角速度ベクトル

4.3　ベクトル積に関する諸関係式

渦度方程式を導く前に下の式を導こう。

3 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, スカラー f, g は (x, y, z) の関数とする。次の式を証明せよ。

(1)

$$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0} \tag{111}$$

(2)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \tag{112}$$

(3)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \tag{113}$$

(4)

$$\nabla\Big(\frac{f}{g}\Big) = -\frac{f}{g^2}\nabla g + \frac{1}{g}\nabla f \tag{114}$$

(5)

$$\nabla \times (f\mathbf{a}) = (\nabla f) \times \mathbf{a} + f(\nabla \times \mathbf{a}) \tag{115}$$

(6)

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a} = \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \tag{116}$$

(7)

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} \tag{117}$$

解答は以下のように定義に従って計算することによって得られる。$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

(1)x 成分は

$$\Big[\nabla \times \nabla f\Big]_x = \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial z}\big) - \frac{\partial}{\partial z}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big) = 0$$

(2)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial x}\big[\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\big] + \frac{\partial}{\partial y}\big[\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\big] + \frac{\partial}{\partial z}\big[\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\big] \\
&= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} = 0
\end{aligned}$$

(3)x 成分は

$$\begin{aligned}
\Big[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})\Big]_x &= \frac{\partial}{\partial y}\big[\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\big] - \frac{\partial}{\partial z}\big[\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\big] \\
&= \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} \\
\Big[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}\Big]_x &= \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\big) - \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \\
&= \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

となり，両辺が等しいことが確認された。
(4) まず合成関数の微分について復習する。$f = f(x)$, $g = g(f)$ とすると $g = g(f) = g(f(x))$ である。g を x で微分すると

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} \tag{118}$$

となる。従って

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{g}) = [\frac{\partial}{\partial g}(\frac{1}{g})]\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x} \tag{119}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{f}{g}) = -f[\frac{1}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x}] + \frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{120}$$

(5) 定義に従い両辺の z 成分を計算する。左辺は

$$\begin{aligned}[\nabla \times (f\mathbf{a})]_z &= \frac{\partial}{\partial x}(fa_y) - \frac{\partial}{\partial y}(fa_x) = f\frac{\partial}{\partial x}(a_y) + a_y\frac{\partial f}{\partial x} - (f\frac{\partial}{\partial y}(a_x) + a_x\frac{\partial f}{\partial y}) \\ &= f(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}) + a_y\frac{\partial f}{\partial x} - a_x\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned} \tag{121}$$

右辺は

$$[(\nabla f) \times \mathbf{a} + f(\nabla \times \mathbf{a})]_z = \frac{\partial f}{\partial x}a_y - \frac{\partial f}{\partial y}a_x + f(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}) \tag{122}$$

(6)

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a} = \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{a})$$

これは例えば右辺の x 成分は、

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{2}\nabla|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{a})\right]_x \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) - det\begin{pmatrix} a_y & \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ a_z & \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}[\frac{\partial a_x}{\partial x}\frac{\partial}{\partial a_x}(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + \frac{\partial a_y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial a_y}(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + \frac{\partial a_z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial a_z}(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)] \\ &\quad -det\begin{pmatrix} a_y & \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ a_z & \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\end{pmatrix} \\ &= a_x\frac{\partial a_x}{\partial x} + a_y\frac{\partial a_y}{\partial x} + a_z\frac{\partial a_z}{\partial x} - \left[a_y(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}) - a_z(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x})\right] \\ &= a_x\frac{\partial a_x}{\partial x} + a_y\frac{\partial a_y}{\partial x} + a_z\frac{\partial a_z}{\partial x} - a_y\frac{\partial a_y}{\partial x} + a_y\frac{\partial a_x}{\partial y} + a_z\frac{\partial a_x}{\partial z} - a_z\frac{\partial a_z}{\partial x} \\ &= a_x\frac{\partial a_x}{\partial x} + a_y\frac{\partial a_x}{\partial y} + a_z\frac{\partial a_x}{\partial z}\end{aligned}$$

となり, 等式は示された。なおここでは,

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = ad - bc$$

である。

(7) $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$ とする。外積の定義より

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{pmatrix} a_yb_z-a_zb_y \\ a_zb_x-a_xb_z \\ a_xb_y-a_yb_x \end{pmatrix} \tag{123}$$

である。式 (117) の左辺の x 成分は, $\nabla\times$ の定義より

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}(a_xb_y-a_yb_x)-\frac{\partial}{\partial z}(a_zb_x-a_xb_z)\\
&=a_x\frac{\partial b_y}{\partial y}+b_y\frac{\partial a_x}{\partial y}-(a_y\frac{\partial b_x}{\partial y}+b_x\frac{\partial a_y}{\partial y})-\big[(a_z\frac{\partial b_x}{\partial z}+b_x\frac{\partial a_z}{\partial z})-(a_x\frac{\partial b_z}{\partial z}+b_z\frac{\partial a_x}{\partial z})\big]\\
&=a_x\frac{\partial b_y}{\partial y}+b_y\frac{\partial a_x}{\partial y}-a_y\frac{\partial b_x}{\partial y}-b_x\frac{\partial a_y}{\partial y}-a_z\frac{\partial b_x}{\partial z}-b_x\frac{\partial a_z}{\partial z}+a_x\frac{\partial b_z}{\partial z}+b_z\frac{\partial a_x}{\partial z}
\end{aligned} \tag{124}$$

式 (117) の右辺の x 成分は,

$$\begin{aligned}
&b_x\frac{\partial a_x}{\partial x}+b_y\frac{\partial a_x}{\partial y}+b_z\frac{\partial a_x}{\partial z}\\
&-\big(a_x\frac{\partial b_x}{\partial x}+a_y\frac{\partial b_x}{\partial y}+a_z\frac{\partial b_x}{\partial z}\big)+\big(\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}\big)a_x-\big(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\big)b_x\\
=&\,b_x\frac{\partial a_x}{\partial x}+b_y\frac{\partial a_x}{\partial y}+b_z\frac{\partial a_x}{\partial z}-a_x\frac{\partial b_x}{\partial x}-a_y\frac{\partial b_x}{\partial y}-a_z\frac{\partial b_x}{\partial z}+a_x\frac{\partial b_x}{\partial x}+a_x\frac{\partial b_y}{\partial y}+a_x\frac{\partial b_z}{\partial z}\\
&-b_x\frac{\partial a_x}{\partial x}-b_x\frac{\partial a_y}{\partial y}-b_x\frac{\partial a_z}{\partial z}\\
=&\,b_y\frac{\partial a_x}{\partial y}+b_z\frac{\partial a_x}{\partial z}-a_y\frac{\partial b_x}{\partial y}-a_z\frac{\partial b_x}{\partial z}+a_x\frac{\partial b_y}{\partial y}+a_x\frac{\partial b_z}{\partial z}-b_x\frac{\partial a_y}{\partial y}-b_x\frac{\partial a_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{125}$$

式 (124) と式 (125) は共に 8 つの項から成り、互いに等しい。式 (124) の 1 項目は式 (125)5 項目と，式 (124) の 2 項目は式 (125)1 項目と，式 (124) の 3 項目は式 (125)3 項目と，式 (124) の 4 項目は式 (125)7 項目と，式 (124) の 5 項目は式 (125)4 項目と，式 (124) の 6 項目は式 (125)8 項目と，式 (124) の 7 項目は式 (125)6 項目と，式 (124) の 8 項目は式 (125)2 項目と，互いに等しい。

5 3 次元渦度ベクトル

3 次元の場合,3 次元渦度ベクトル「オメガ 」の定義は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}&=\nabla\times\mathbf{v}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\times(u,v,w)\\
&=\Big(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\Big)=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)
\end{aligned} \tag{126}$$

また渦度ベクトルと流体要素の関係は, 図 21a のようになる（流体の微小部分を流体要素という。その形は直方体、球、柱などそのとき説明しやすいものを使っている)。一方渦度ベクトルを結んだ線を渦線という (図 21b)。流線の定義が「流れの中に引いた曲線であってその上の各点での接線がその点の流速ベクトルと平行な曲線のこと。」に対して，渦線の定義は

渦度のある流れの中に引いた曲線であってその上の各点での接線がその点の渦度ベクトルと平行な曲線のこと。」
となる。式 (87) より渦線の式は

$$d\mathbf{r}//\boldsymbol{\omega}; \quad \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \tag{127}$$

となる。

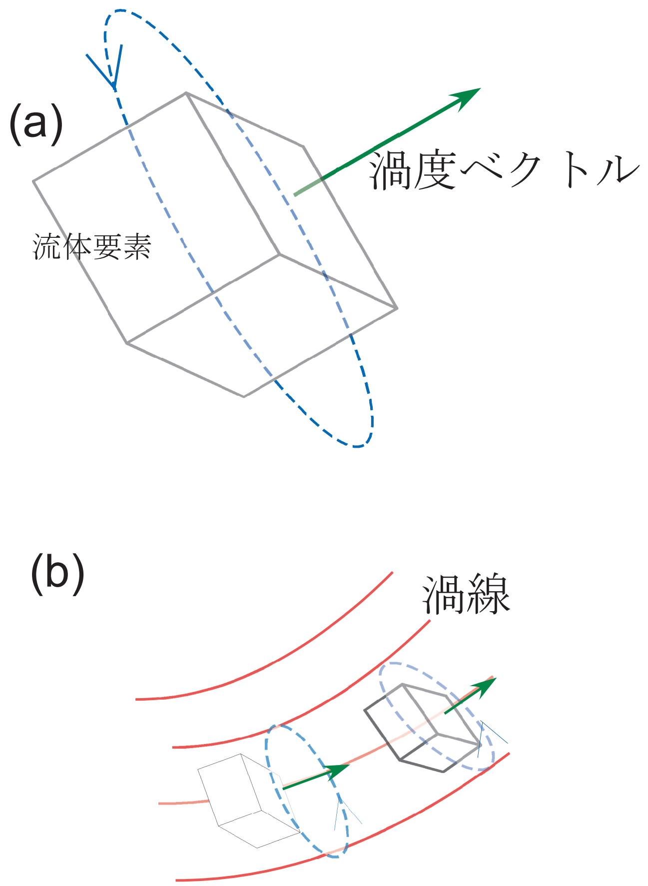


図 21: (a) 渦度ベクトル, (b) 渦線

5.1 渦度方程式

これから運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \tag{128}$$

$\mathbf{g} = (0, 0, g)$ を渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ に関する方程式に書き直す。式 (128) の両辺に左から $\nabla\times$ を施す。式 (128) は左辺に 2 項、右辺に 3 項、合計 5 項の項からなる。それらに左から $\nabla\times$ を施した項のうち、3 つは簡単に求められる。

$$\nabla \times (\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}) = \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{v})}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \tag{129}$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{0} \tag{130}$$

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{v}) = \nabla^2(\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{131}$$

残り二つに関してはベクトル積に関する以下の式を用いる (3 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, スカラー f, g は (x, y, z) の関数)。

$$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0} \tag{132}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \tag{133}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \tag{134}$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = -\frac{f}{g^2}\nabla g + \frac{1}{g}\nabla f \tag{135}$$

$$\nabla \times (f\mathbf{a}) = (\nabla f) \times \mathbf{a} + f(\nabla \times \mathbf{a}) \tag{136}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a} = \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \tag{137}$$

式 (137):

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{v}|^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \tag{138}$$

式 (132):

$$\begin{aligned}
\nabla \times [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] &= \nabla \times [\frac{1}{2}\nabla|\mathbf{v}|^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \\
&= -\nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] = -\nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \\
&= -[(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\omega}] \\
&= -[(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\nabla \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\omega}]
\end{aligned} \tag{139}$$

式 (117), (133): $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ を使用した。式 (136) などより

$$\begin{aligned}
\nabla \times [-\frac{1}{\rho}\nabla p] &= -\nabla(\frac{1}{\rho}) \times \nabla p - \frac{1}{\rho}(\nabla \times \nabla p) = -\nabla(\frac{1}{\rho}) \times \nabla p = -\nabla(\frac{1}{\rho}) \times \nabla p \\
&= \frac{1}{\rho^2}\nabla \rho \times \nabla p
\end{aligned} \tag{140}$$

となる。運動方程式 (128) を渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ に関する方程式に書き直すと

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\nabla \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\omega} \\ &\quad + \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}\end{aligned} \tag{141}$$

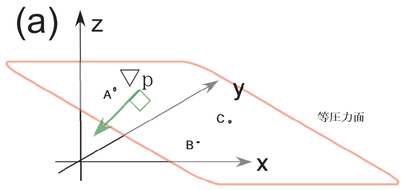
ラグランジュ微分で書くと,

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{142}$$

式 (141) 或いは (142) を渦度方程式 (vorticity equation) という。

5.2 渦度方程式各項の物理的意味

密度 ρ が圧力 p によってのみ決まる場合 これを順圧 (barotropic) 流体という (密度 ρ が一定値の場合も含む)。図 22 の説明から, ∇p と $\nabla \rho$ は, 平行である (図 22)。従って順圧流体の場合, $\nabla \rho \times \nabla p = \mathbf{0}$ となる。一方 $\nabla \rho \times \nabla p$ が 0 になるとは限らない場合、等圧面と等密度面は, 一致するとは限らない。これを傾圧流体 (baroclinic fluid) という。



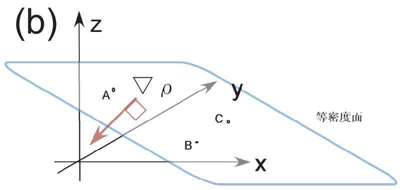


図 22: (a), (b) 順圧流体における等圧面 (等 p 面) と等密度面 (等 ρ 面)。等圧面における任意の点 A、B、C では圧力は等しい。順圧流体の場合、圧力が等しければ密度も等しい。従って点 A、B、C では密度も等しい。すなわち等圧面と等密度面は, 順圧流体の場合一致する。第 2.4 章の説明からわかるように, ∇p は, 等圧面と直交する。また $\nabla \rho$ は, 等密度面と直交する。従って ∇p と $\nabla \rho$ は, 平行である。なお等圧面と等密度面とは平面であるとは限らず, 曲面であってもよい。

渦度方程式 (vorticity equation) (142) の右辺の各々の項について考察する。式 (142) の右辺第 1 項は, 渦柱 (円柱型の流体微小要素で、その円柱の回転軸が渦線 (図 21b) と一致) の傾きが変わることによる変化を表す。式 (142) の右辺第 2 項は, 渦柱の伸び縮みによる変化を表す。式 (142) の右辺第 3 項は, ソレノイド項（傾圧項）(baroclinic term) と呼ばれる。式 (142) の右辺第 2 項

$$-(\nabla \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\omega}$$

は発散項 (divergence term) と呼ばれる．これは回転している流体が角運動量を保存しながら, そ

の回転半径を変化させると角速度が変化することに似ている. たとえば $\boldsymbol{\omega}$ の z 成分

$$\omega_z = \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{143}$$

について考える。正の回転 ($\omega_z > 0$) の場合、発散が正ならば、$-(\nabla \cdot \mathbf{v})\omega_z$ は負で、回転速度を減少させる。一方、収束 ($\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$) ならば、$-(\nabla \cdot \mathbf{v})\omega_z$ は正で、回転速度を増大させる。発散が正であることは, 流体の回転半径が増大することに相当する. 収束であることは, 流体の回転半径が増大することに相当する (図 23).

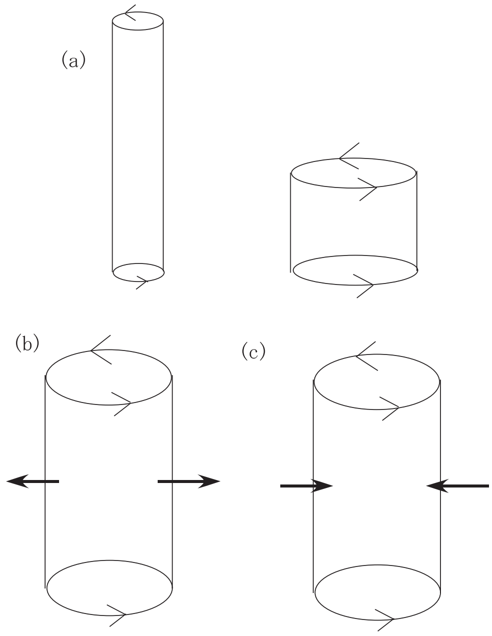


図 23: (a) 体積を保存しながら、回転する渦柱。左の背の高い渦柱の方が、右の背の低い渦柱よりも回転角速度は大きい。(b) 発散が正の場合。渦柱は (a) の右のように背が低くなり、回転角速度は減少。(c) 収束の場合。渦柱は (a) の左のように背が高くなり、回転角速度は増加。

渦度方程式 (vorticity equation) (142) の右辺の第 1 項

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

は立ち上り項 (tilting term or twisting term) と呼ばれる。簡単のため、渦度ベクトルの x,y 成分は 0 で 0 成分のみが 0 でないとする。すなわち

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \left(0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = (0, 0, \omega) = (0, 0, \omega_z) \tag{144}$$

とする。$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ の x 成分は, $\omega_z \dfrac{\partial u}{\partial z}$ である。図 24a のように微小渦柱を考える。高さは Δz である。$u(z + \Delta z)$, と $u(z)$ が異なるため、この渦柱は図 24a のように傾く。1 秒後に図 24a の左から、右のように渦柱が傾いたとしよう。すると渦柱の回転を表す渦度ベクトルは z 方向に平行で

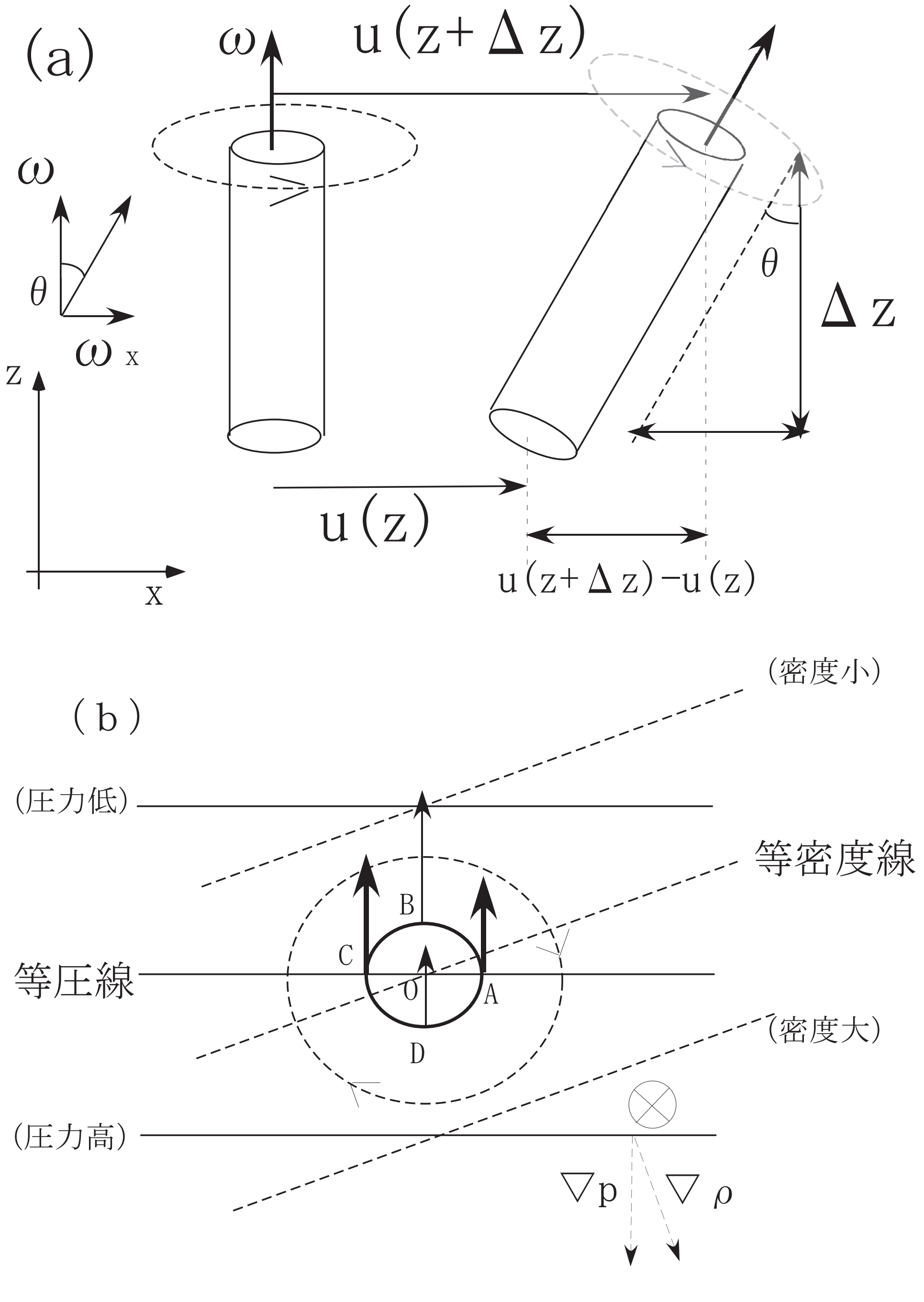


図 24: (a) 立ち上り項 (b) 傾圧項

あったが、傾くことにより、x 成分も持つことになる (図 24a では $\omega = \omega_z$)。図 24a の θ について、

$$\tan\theta = \frac{u(z+\Delta z) - u(z)}{\Delta z} \simeq \frac{\partial u}{\partial z} \tag{145}$$

従って図の ω_x は

$$\omega_x = \omega \tan\theta = \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} \tag{146}$$

この式 (146) は 1 秒あたりの渦度ベクトル x 成分の変化分を表している。$(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ の x 成分 $\omega_z \dfrac{\partial u}{\partial z}$ となる。

渦度方程式 (vorticity equation) (142) の右辺の第 3 項

$$\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p$$

は, ソレノイド項（傾圧項）(baroclinic term) と呼ばれる。図 24b のように等圧線と等密度線とが交差している場合を考える。図 24b の実線の円で示される微小流体粒子を考える。流体粒子の中心を O とする。また流体粒子の周りでは圧力は空間に対して一定の割合で変化、すなわち圧力傾度は一様とする。ところが圧力傾度力は

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

であり，圧力傾度 ∇p が一様でも流体要素の単位質量あたりに働く圧力傾度力は一様ではない。流体要素の単位質量あたりに働く圧力傾度力の大きさ (絶対値）は, 密度が大きくなるほど小さくなる。図 24b の流体粒子 (太線の円で表示) 上の点 A, B, C, D に関して密度は大きい順に D, A, C, B となる。従って流体要素の単位質量あたりに働く圧力傾度力の大きさ (絶対値）は大きい順に B, C, A, D となる。D, B は各々流体粒子の中心 O に対して対照な位置にある。しかしその圧力傾度力の向きより、流体粒子の回転には寄与しない。一方 A, C はそれらの点での流体要素の単位質量あたりに働く圧力傾度力の差により, 流体粒子の時計回りの回転 (図 24b の点線の円で示されている）を生じさせることがわかる。等圧線と等密度線とが交差している（平行ではない）ため，このような回転が生じる。回転は時計回りなので，この効果により生成される渦度ベクトルの方向は、図の紙面に垂直で紙面に向かう方向 ($\otimes$) となる。これは $\nabla\rho \times \nabla p$ の向きと一致する。図 24b において, $\nabla\rho$ の向きは等密度線に垂直で , 密度が小さい方から大きい方へ向かう向きである。∇p の向きは等圧力線に垂直で , 圧力が小さい方から大きい方へ向かう向きである。

運動方程式より, 物体の単位質量あたりに働く力とは, 物体の加速度のことである。図 25 のように, 左半分が密度が小さく (軽い）, 右半分が密度が大きい (重い）物体にそれぞれ同じ力を与える。この場合, 左半分の方が, 加速度が大きい。そして図 25 のような回転が生じる。従って上述の「流体要素の単位質量あたりに働く圧力傾度力の差」も「圧力傾度力による加速度の差」として解釈できる。

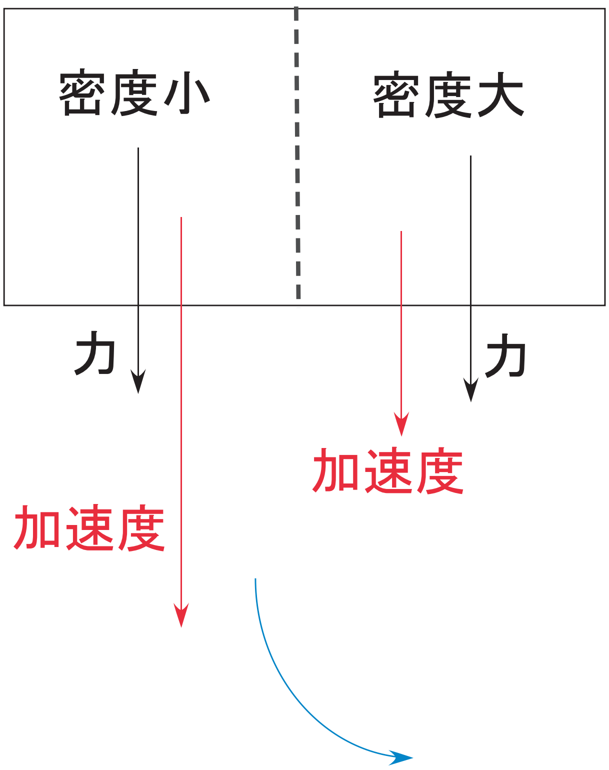


図 25: